Uyarı: Eğri düşey asimptotu kesmez.

Örnek: $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulalım.

Önce fonksiyonun tanım kümesini belirleyelim.

$$\frac{x-1}{x+1}>0 \Rightarrow D_f=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

$\Rightarrow \mp 1$ de düşey asimptot olabilir.

$$\lim_{x\to 1^+}\ln\frac{\overset{\to 0^+}{x-1}}{\underset{\to 2}{x+1}}=-\infty \Rightarrow x=1 \text{ sağdan düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\ln\frac{\overset{\to -2}{x-1}}{\underset{\to 0^-}{x+1}}=\infty \Rightarrow x=-1 \text{ soldan düşey asimptot.}$$

Yatay asimptotları inceleyelim:

$$\lim_{x\to\mp\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}=\ln 1=0 \Rightarrow y=0 \text{ yatay asimptot.}$$

Süreklilik

Tanım: $f: A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_0\in A$ olsun. $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

O halde f in x_0 da sürekli olması için

1) f, x_0 da tanımlıdır,

2) $\lim_{x\to x_0}f(x)$ vardır,

3) $f(x_0)$ ile $\lim_{x\to x_0}f(x)$ eşittir

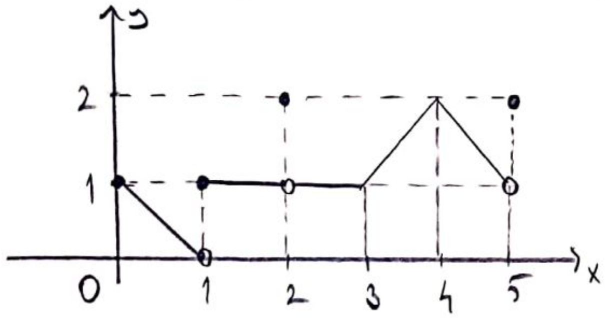
şartlarının sağlanması gerekir.

Eğer f fonksiyonu tanım kümesindeki her noktada sürekli ise f e sürekli fonksiyon denir.

Uyarı: $D_f=[a,b]$ ise $x=a$ ve $x=b$ de süreklilik için a da sağ, b de sol limitlere bakılır.

f, x_0 da süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $|x-x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır.

Örnek: $f: [0,5] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$, $x=0$ da sürekli

$x_0 \in (0,1)$ için $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ sürekli

$x=1$ de sağ ve sol limitler farklı olup limit yoktur $\Rightarrow x=1$ de sürekli değil

$x_0 \in (1,2)$ için $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ sürekli

$x=2$ için $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2) \Rightarrow$ sürekli değil.

$x_0 \in (2,5)$ için $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ sürekli

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 1 \neq 2 = f(5) \Rightarrow$ sürekli değil.

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a, b \in A$ olsun.

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ fonksiyonuna a noktasında sağdan sürekli,

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b) \Rightarrow f$ fonksiyonuna b noktasında soldan sürekli denir.

Uyarı: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f in bir $c \in A$ noktasında sürekli olması için

c iç nokta ise ($A = [a,b]$ ve $c \in (a,b)$ gibi) f in c de hem sağdan hem soldan sürekli

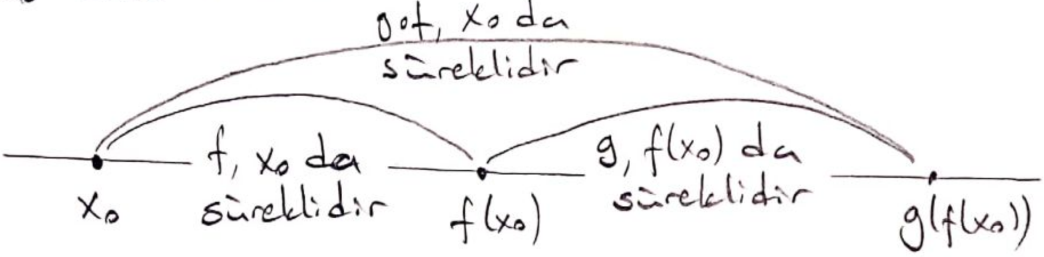
c uç nokta ise ($A = [a,b]$ ve $c = a$ veya $c = b$ gibi)

f in c de sağdan veya soldan sürekli olması gerekir.

Uyarı: f bir polinom ise her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ olduğundan f c de süreklidir. $c \in \mathbb{R}$ keyfi olup f, $\mathbb{R}$ de süreklidir.

Teorem: 1) f ve g fonksiyonları x_0 noktasında sürekli ise $f \mp g$, $f \cdot g$, cf (c sabit), $f^{r/s}$ fonksiyonları da x_0 da süreklidir. $g(x_0) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ de x_0 da süreklidir.

2) f x_0 da, g ise $f(x_0)$ sürekli ise $g \circ f$ de x_0 da süreklidir.



Örnek: Rasyonel fonksiyonlar tanımlı olduğu her noktada süreklidir. Çünkü $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere sürekli olacağından $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tanımlı olduğu yani $Q(x) \neq 0$ olan her noktada süreklidir.

Örnek: Mutlak değer fonksiyonu süreklidir.

$f(x) = |x| \Rightarrow x > 0 \Rightarrow f(x) = x$ polinom olup sürekli

$x < 0 \Rightarrow f(x) = -x$ " " "

$x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0) \Rightarrow x = 0$ da sürekli

Örnek: Trigonometrik fonksiyonlar tanımlı oldukları her noktada süreklidir.

Örnek: $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ fonksiyonunun tanım aralığında sürekli olduğunu gösterelim:

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ fonksiyonu $g(x) = x$ polinomunun bir rasyonel kuvveti olup süreklidir.

$h(x) = x^2 + 2x + 3$ bir polinom olup süreklidir.

$y = (f \circ h)(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ iki sürekli fonksiyonun bileşkesi olup süreklidir.

Örnek: $y=\left|\dfrac{x^2\cos x}{x-1}\right|$ fonksiyonunun tanım kümesinde sürekli olduğunu gösterelim:

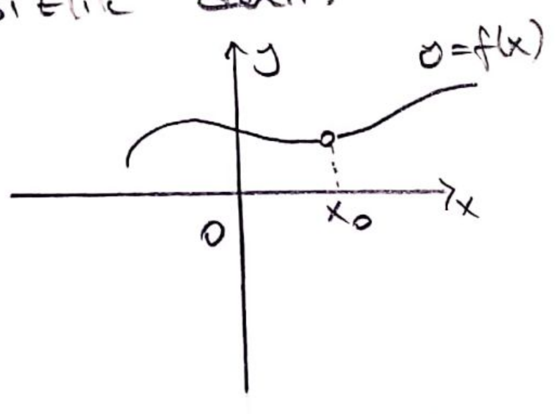
$\underbrace{x^2}_{\text{Polinom}}\underbrace{\cos x}_{\text{trigonometrik fonksiyon}}$ $\Rightarrow$ iki sürekli fonksiyonun çarpımı sürekli

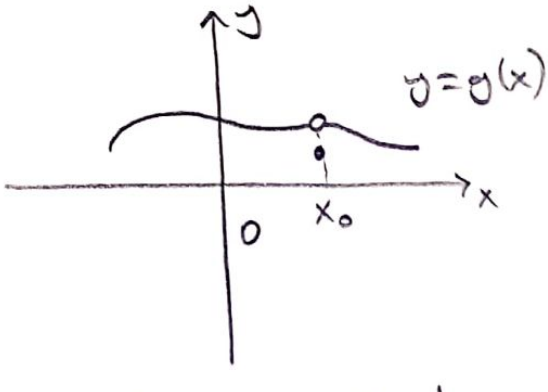
$x-1 \Rightarrow$ Polinom olup sürekli

$\dfrac{x^2\cos x}{x-1} \Rightarrow$ iki sürekli fonksiyonun oranı olup sürekli

$y=\left|\dfrac{x^2\cos x}{x-1}\right| \Rightarrow$ Mutlak değer fonksiyonu ile $\dfrac{x^2\cos x}{x-1}$ fonksiyonunun bileşkesi olup süreklidir.

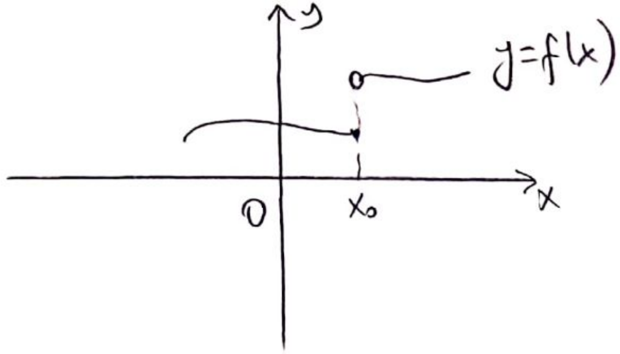
Tanım: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ olsun. f fonksiyonu x_0 noktasında tanımsız veya $f(x_0)\neq L$ ise x_0 noktasında fonksiyon süreksizdir. Bu süreksizliğe kaldırılabilir süreksizlik denir.





Yukarıda grafikleri verilen f ve g fonksiyonları x_0 noktasında kaldırılabilir süreksizdir.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ise fonksiyon x_0 noktasında kaldırılamaz süreksizdir.



f fonksiyonu x_0 noktasında kaldırılamaz süreksizdir.

Örnek: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x\neq 0$ olmak üzere her noktada süreklidir. Çünkü; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\frac{\sin x_0}{x_0}=f(x_0)$, $x_0\neq 0$ dır. Diğer yandan $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ olup fonksiyon 0. da tanımlı olmadığı için 0 noktası kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

fonksiyonu ise her noktada süreklidir. Bu fonksiyonun $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ den tek farkı f in tanımlı olmadığı sıfır noktasında da tanımlı olmasıdır.

Örnek:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^4-1}, & x<2\\ x^2+3x-2, & x\geq 2\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. Fonksiyon $x=\mp 1$ de tanımsız olduğu için süreksizdir.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x^4-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{(x^2-1)}(x^2+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$ olup fonksiyon $x=1$ de kaldırılabilir süreksiz.

Benzer şekilde $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\frac{1}{2}$ olup $x=-1$ de de fonksiyon kaldırılabilir süreksizdir.

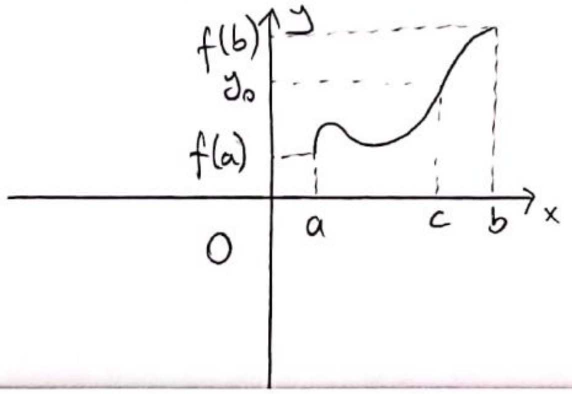
$x=2$ de fonksiyon parçalandığı için bu noktada süreksiz olabilir.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+3x-2)=8$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x^4-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

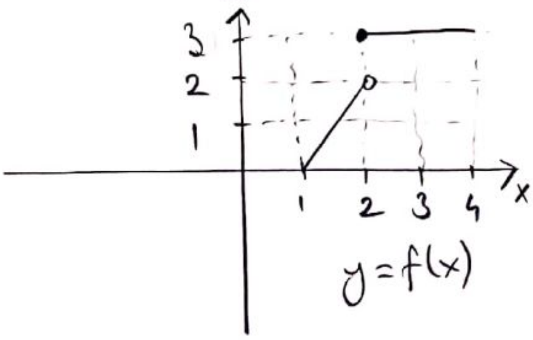
$\Rightarrow x=2$ de kaldırılamaz süreksiz.

Ara değer teoremi: $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı olan sürekli bir f fonksiyonu $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değeri alır. Diğer bir ifadeyle y_0; $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir sayı ise en az bir $c \in [a,b]$ için $f(c) = y_0$ olur.



Geometrik olarak y eksenini $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir y_0 sayısında kesen yatay bir doğru $y=f(x)$ eğrisini en az bir noktada keser.

Uyarı: Aradeğer teoreminde f fonksiyonunun sürekli olması gerekir. Aksi halde teorem geçersiz olur.



Yanda grafiği verilen f fonksiyonu süreksiz olduğu için $f(0)=1$ ile $f(4)=3$ arasındaki her değeri almaz.

Tanım: $f(x)=0$ denkleminin çözümüne f fonksiyonunun bir kökü veya sıfırı denir.

Aradeğer teoremine göre sürekli bir f fonksiyonu işaret değiştirdiği her aralıkta en az bir köke sahiptir.

Örnek: $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunun 1 ve 2 arasında bir kökünün olduğunu gösterelim.

f bir polinom olup $\mathbb{R}$ de sürekli, dolayısıyla $[1,2]$ üzerinde süreklidir. O halde ara değer teoremi uygulanabilir.

$$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 3 = 5 > 0$$

$\Rightarrow$ Ara değer teoremine göre f fonksiyonu -1 ile 5 arasındaki her değeri alacağı için 0 değerini de alır. O halde $[1,2]$ aralığında f in en az bir kökü vardır.

TÜREV

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in A$ sayısı verilsin.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ limiti veya buna denk olan

ve bu ifadede $x = x_0 + h$ alınması ile elde edilen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

limiti varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında türevlenebilirdir denir, ve bu limit değerine de f nin x_0 noktasındaki türevi adı verilir ve

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ ile gösterilir.